

|                 |   |
|-----------------|---|
| ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ : | ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ |
| ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :    | 27/08/2019                              |

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ .

**α)** Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

(Μονάδες 2)

Αν  $f, g$  δύο συναρτήσεις πεδίο ορισμού  $A, B$  αντιστοίχως, τότε:

**β) i.** Πότε ορίζεται η σύνθεση της  $f$  με την  $g$ ;

(Μονάδα 1)

**ii.** Τι ονομάζουμε σύνθεση της  $f$  με την  $g$ ;

(Μονάδες 2)

και ποιο το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$ ;

(Μονάδα 1)

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής που αφορά το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Μονάδες 3**

**A3.** Έστω  $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  πολυώνυμο του  $x$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ .

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

**α)** Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα **A** και **B** του πεδίου ορισμού της, τότε υποχρεωτικά θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας και στην ένωση των διαστημάτων, δηλαδή στο σύνολο  $A \cup B$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος

Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση με αντιπαράδειγμα)

**β)** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε υποχρεωτικά υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

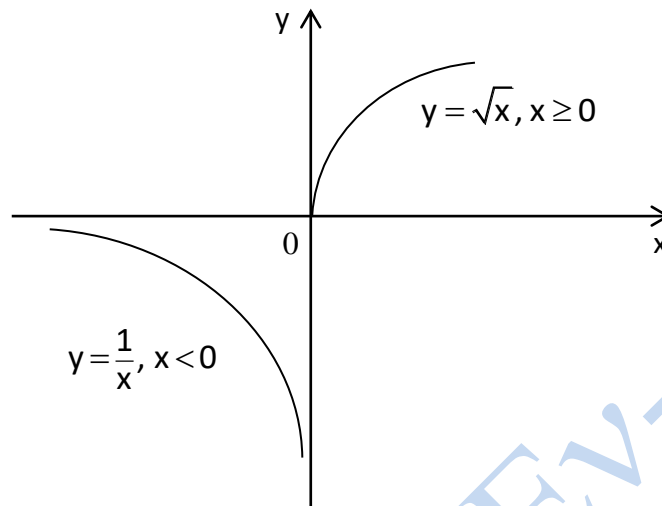
και ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος

Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση με αντιπαράδειγμα)

**Μονάδες 8**

- A5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$  της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της  
 β) Η συνάρτηση είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της  
 γ)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]^n = 0, n \in \mathbb{N} - \{0\}$   
 δ) Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbb{R} - \{0\}$   
 ε) Η εξίσωση  $f(x) = |x| + 1, x \in \mathbb{R}$ , έχει μοναδική λύση  
 στ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ , για  $x < 0$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα που αντιστοιχούν σε σωστές απαντήσεις.

**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = \sqrt{2-x}$ .

- B1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των  $f, g$  (Μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση:  
 $f(x) = g(x)$ . (Μονάδες 2)

**Μονάδες 4**

- B2. Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της  $g$ ;

**Μονάδες 5**

- B3. Να ορίσετε τη συνάρτηση  $\frac{f}{g}$ .

**Μονάδες 9**

**B4.** Να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \left( \left( \frac{f}{g} \right)(x) \right)^{2019} + \frac{g(x)-1}{x^2+x-2} \right] = -\frac{1}{6}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

**Γ1.** Να υπολογίσετε τα όρια:

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x) + \sigma\upsilon\nu f(x) - 1}{f(x)}$ .

**Μονάδες 5**

**β)**  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ , όταν για τη συνάρτηση  $h$  ισχύει:  $|h(x)| \leq |f(x)|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Αν για τη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ισχύει:  $e^{g(x)} - e^{-g(x)} = 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:  
 $(f \circ g)(x) = x$  και  $g(0) = 0$ .

**Μονάδες 4**

**Γ3.** Να δείξετε ότι  $g$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Αν επιπλέον:  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha [g(x)+1] + f(x) - 2}{f(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$ ,

να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \kappa - e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ , με  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,

για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $\kappa = 1$  και  $\lambda = 0$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να υπολογίσετε τα όρια

**i)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f^3(x) - f(x) + 1| + f(x) - 1}{f^4(x) + f^3(x)}$ .

**Μονάδες 5**

**ii)**  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , όταν για τη συνάρτηση  $g$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2}{f(x)} = m \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Αν  $h(x) = \ln(1-x)$ , να βρείτε τη σύνθεση της  $f$  με την  $h$ .

**Μονάδες 5**

Φροντιστήρια Εν-τάξη