ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ/ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	09/11/2019

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ’ ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 2)

Α2. Έστω $A \subseteq R$.

α. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to R$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

β. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ; (αν είναι γνωστό ότι η f είναι αντιστρέψιμη).

(Μονάδες 3)

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να γράψετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 2+2=4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία τις προτάσεις που ακολουθούν με: **Σωστό,** ή **Λάθος**. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Για κάθε συνάρτηση $f: A \to R$ ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in A$.

(Μονάδα 1 για Σωστό ή Λάθος)
(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

β. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σ’ ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της. Αν για κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει ότι $f(x_0) = 0$, τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

(Μονάδες 2 για Σωστό ή Λάθος)
(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

γ. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

(Μονάδα 1 για Σωστό ή Λάθος)
(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

Α5. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

(Μονάδες 5)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x)+e^{f(x)}=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. **(Μονάδες 5)**

Β2. Να δείξετε η αντίστροφη συνάρτηση της f έχει τύπο: $f^{-1}(x)=x+e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Β3. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$.

(Μονάδες 4)

β. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{x}$.

(Μονάδες 4)

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 6)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$|xf(x)-4\eta\mu 2x|\le x^4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(1)+4)x^4+x^3-2}{|x^3-x^2+1|+1}=-1$.

Να δείξετε ότι:

Γ1. $f(0)=8$.

(Μονάδες 6)

Γ2. $f(1)=-4$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Η εξίσωση $f(x)=1-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho\in(0,1)$.

(Μονάδες 7)

Γ4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(f(\rho))^x+\dfrac{2019^{-x}+\kappa}{\ln x}\right]=0$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x+\gamma$. Αν ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)+\eta\mu x}{x}=2,\ f'(0)=1,\ f\big(f(0)\big)=12,$$ τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x^3+x+2$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\left[f\left(\frac{13}{x}\right)-2\right]\cdot x\right)$.

(Μονάδες 4)

ii) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\left[f'(2019+2h)-4f'(2019)+3f'(2019-h)\right]$.

(Μονάδες 4)

Έστω, επιπλέον, ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(R)$.

Δ3. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}(x)+1}{x}.$$

(Μονάδες 5)

Δ4. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(R)$ (Μονάδες 2) και στη συνέχεια ότι υπάρχει μοναδικό $\rho\in(4,5)$, τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$4f^{-1}(\rho)=f^{-1}(4)+3f^{-1}(5)$ (Μονάδες 4).

(Μονάδες 6)