ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ/ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	09/11/2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 73.
Α2. **α.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 35.
β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 35.
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74.
Α4. **α.** **Λάθος.**
Αιτιολόγηση: Ισχύει όταν η f είναι συνεχής στο x_0.
β. **Λάθος.**
Αιτιολόγηση: Δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano.
γ. **Λάθος.**
Αιτιολόγηση: Το όριο πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός.
Α5. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$, έχουμε $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$,
άρα $f(x_1)+e^{f(x_1)}=f(x_2)+e^{f(x_2)} \Leftrightarrow x_1=x_2$, επομένως η f είναι 1-1 στο R.

Β2. Η f είναι 1-1 στο R, επομένως αντιστρέφεται. Θέτουμε στη σχέση $f(x)+e^{f(x)}=x$, $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Άρα $y+e^y=x,\ y\in R$.
Οπότε: $f^{-1}(x)=x+e^x,\ x\in R$.

Β3. **α.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

β. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{x}+1\right)=0\cdot0+1=1,$$
αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Β4. $f(x)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=f^{-1}(0) \Leftrightarrow x=e^0+0 \Leftrightarrow x=1$.

Φροντιστήρια Εν-τάξη

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από $\left|xf(x)-4\eta\mu 2x\right|\le x^4$, για κάθε $x\ne 0$, έχουμε:

$$\frac{\left|xf(x)-4\eta\mu 2x\right|}{|x|}\le\frac{|x|^4}{|x|}\Leftrightarrow\left|\frac{xf(x)-4\eta\mu 2x}{x}\right|\le|x|^3,\text{ άρα:}$$

$$-|x|^3\le f(x)-4\frac{\eta\mu 2x}{x}\le|x|^3\Leftrightarrow 4\frac{\eta\mu 2x}{x}-|x|^3\le f(x)\le|x|^3+4\frac{\eta\mu 2x}{x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}\overset{2x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{\frac{u}{2}}=\lim\limits_{u\to 0}2\frac{\eta\mu u}{u}=2\cdot 1=2$, επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\left(4\frac{\eta\mu 2x}{x}-|x|^3\right)=4\cdot 2-0=8 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(4\frac{\eta\mu 2x}{x}+|x|^3\right)=4\cdot 2+0=8.$$

Από κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=8$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=8$.

Γ2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, άρα $x^3-x^2+1<0$ (κοντά στο $-\infty$). Οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(1)+4)x^4+x^3-2}{\left|x^3-x^2+1\right|+1}=-1\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(1)+4)x^4+x^3-2}{-x^3+x^2-1+1}=-1\Leftrightarrow$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(f(1)+4)x^4+x^3-2}{-x^3+x^2}=-1$, όπου αν $f(1)+4\ne 0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(f(1)+4)x^4+x^3-2}{-x^3+x^2}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(f(1)+4)x^4}{-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(1)+4)(-x)=-\infty$ ή $+\infty$, που είναι άτοπο.

Άρα $f(1)+4=0$, γιατί τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(f(1)+4)x^4+x^3-2}{-x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-2}{-x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-x^3}=-1.$

Επομένως $f(1)=-4$.

Γ3. Θέτουμε $f(x)-1+x=g(x),\ x\in[0,1]$.

Τότε η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών και

$g(0)=f(0)-1+0=8-1=7>0,\quad g(1)=f(1)-1+1=f(1)=-4<0,$

άρα $g(0)\cdot g(1)<0$. Συνεπώς από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1)$, ώστε $g(\rho)=0\Leftrightarrow g(\rho)=1-\rho$, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=1-x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho\in(0,1)$.

Γ4. Είναι $\rho\in(0,1)$, άρα $0<\rho<1$, οπότε και $0<1-\rho<1$, δηλαδή και $0<f(\rho)<1$, αφού $f(\rho)=1-\rho$ από **Γ3.** Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(\rho))^x=0$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}2019^{-x}+\kappa=0+\kappa=\kappa\in R$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$, άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(f(\rho))^x+\frac{2019^{-x}+\kappa}{\ln x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(f(\rho))^x+\frac{1}{\ln x}\left(2019^{-x}+\kappa\right)\right]=0+0\cdot K=0.$$

Φροντιστήρια Εν-τάξη

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\left|\frac{ημx}{x}\right| = \frac{|ημx|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$, άρα $\left|\frac{ημx}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{ημx}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$, οπότε

από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx}{x}=0$. Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf\left(\frac{ημx}{x}\right)+ημx}{x}=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f\left(\frac{ημx}{x}\right)+\frac{ημx}{x}\right]=2 \overset{\frac{ημx}{x}=u}{\Leftrightarrow} \lim_{u\to0}\left[f(u)+u\right]=2 \Leftrightarrow f(0)=2 \Leftrightarrow$$

$\gamma=2$, αφού f συνεχής ως πολυωνυμική. Οπότε $f(x)=\alpha x^3+\beta x+2$.

$f'(x)=\left(\alpha x^3+\beta x+2\right)' \Leftrightarrow f'(x)=3\alpha x^2+\beta$, άρα $f'(0)=1 \Leftrightarrow \beta=1$, τότε

$f(x)=\alpha x^3+x+2$. Επίσης $f(f(0))=12 \Leftrightarrow f(2)=12 \Leftrightarrow 8\alpha+2+2=12 \Leftrightarrow \alpha=1$.

Τελικά $f(x)=x^3+x+2,\ x\in R$.

Δ2.

i) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\left[f\left(\frac{13}{x}\right)-2\right]\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f\left(\frac{13}{x}\right)-2}{\frac{1}{x}}\right)\overset{\frac{13}{x}=u}{=}\lim_{u\to0}\left[13\cdot\frac{f(u)-f(0)}{u}\right]=$$

$13f'(0)=13\cdot1=13$.

ii) $$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\left[f'(2019+2h)-4f'(2019)+3f'(2019-h)\right]=$$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(2019+2h)-f'(2019)}{h}+3\frac{f'(2019-h)-f'(2019)}{h}\right]=\mu.$$

Θα υπολογίσουμε το μ.

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(2019+2h)-f'(2019)}{h}\overset{2h=u}{=}\lim_{u\to0}\frac{f'(2019+u)-f'(2019)}{\frac{u}{2}}=$$

$$2\lim_{u\to0}\frac{f'(2019+u)-f'(2019)}{u}=2f''(2019),$$ ακόμη:

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(2019-h)-f'(2019)}{h}\overset{-h=u}{=}\lim_{u\to0}\frac{f'(2019+u)-f'(2019)}{-u}=-f''(2019).$$

Επομένως $\mu=-f''(2019)=-6\cdot2019=-12114$, αφού:

$f'(x)=3x^2+1$, άρα $f''(x)=6x$.

f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(R)$.

Δ3. Για το $\lim\limits_{x\to0}\frac{f^{-1}(x)+1}{x}$, θέτουμε $f^{-1}(x)=u$, οπότε $x=f(u)$.

Έτσι για $x \to 0$ τότε $u \to -1$, επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)+1}{x} = \lim\limits_{u\to -1}\dfrac{u+1}{f(u)} = \lim\limits_{u\to -1}\dfrac{u+1}{u^3+u+2} =$

$\lim\limits_{u\to -1}\dfrac{u+1}{(u+1)(u^2-u+2)} = \lim\limits_{u\to -1}\dfrac{1}{u^2-u+2} = \dfrac{1}{4}$.

Δ4. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $x_1^3 < x_2^3$ και $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2$, άρα: $x_1^3 + x_1 + 2 < x_2^3 + x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Για οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in f(R)$, με $y_1 < y_2$, ισχύει

$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \overset{f:\text{γνησ.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, οπότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(R)$.

Θέτουμε $g(x) = 4f^{-1}(x) - f^{-1}(4) - 3f^{-1}(5)$, $x \in [4,5]$.

Τότε g συνεχής στο $[4,5]$ αφού f^{-1} συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Ισχύει ότι f^{-1} γνησίως αύξουσα και 4<5, άρα $f^{-1}(4) < f^{-1}(5)$.

$g(4) = 4f^{-1}(4) - f^{-1}(4) - 3f^{-1}(5) = 3(f^{-1}(4) - f^{-1}(5)) < 0$

$g(5) = 4f^{-1}(5) - f^{-1}(4) - 3f^{-1}(5) = f^{-1}(5) - f^{-1}(4) > 0$.

Οπότε $g(4)\cdot g(5) < 0$. Συνεπώς από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (4,5)$, ώστε $g(\rho) = 0 \Leftrightarrow 4f^{-1}(\rho) = f^{-1}(4) + 3f^{-1}(5)$ και επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, το ρ θα είναι μοναδικό.

Φροντιστήρια Εν-τάξη