

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 07/03/2020

### ΘΕΜΑΤΑ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

(Μονάδες 8)

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;

(Μονάδες 2)

**A3. α.** Να αναφέρετε τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

**β.** Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

**γ.** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $-\infty$ ;

(Μονάδες 2+1+1)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία τις προτάσεις που ακολουθούν με: **Σωστό**, ή **Λάθος**.  
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

**α.** Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι  $f'(x) = 0$ , για κάθε  $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $(-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ .

(Μονάδα 1 για Σωστό ή Λάθος)

(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

**β.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

(Μονάδα 1 για Σωστό ή Λάθος)

(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς σε διάστημα  $\Delta$ .  
Αν  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει  $f(x) = g(x) + c$ .
- β.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα σημείο του  $\Delta$ .  
Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:  $f'(x_0) = 0$ .
- γ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει  
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$
- δ.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .  
Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\beta}^{\alpha} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$ .
- ε.** Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Τότε ισχύει:  
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du, \text{ όπου } u = g(x), du = g'(x) dx \text{ και } u_1 = g(\alpha), u_2 = g(\beta).$$
- (Μονάδες 5)**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 3} - x$ .

**B1.** Να βρείτε την συνάρτηση  $f'(x)$  και να λύσετε την εξίσωση:  $f'(x) = 0$ .

**(Μονάδες 4+3)**

**B2.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**(Μονάδες 4+2)**

**B3.** Να δείξετε ότι οι ασύμπτωτες στη γραφική παράσταση της  $f$  είναι:

η  $y = -3x$  στο  $-\infty$  και η  $y = x$  στο  $+\infty$ .

**(Μονάδες 3+3)**

**B4. α.** Να δείξετε ότι για την  $f$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στα διαστήματα  $[1, x]$  και  $[x, x+1]$ ,  $x > 1$ .

**(Μονάδες 4)**

**β.** Υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί  $\rho_1, \rho_2$  με  $\rho_1 < \rho_2$ , τέτοιοι, ώστε:

$$f'(\rho_1)(x-1) + f'(\rho_2) = f(x+1) - 3.$$

**(Μονάδες 2)**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + 2x - \int_0^1 f(x) dx$ .

Γ1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x + 2x - \frac{e}{2}$ .

(Μονάδες 8)

Γ2. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 2f\left(\frac{x+1}{x}\right) - e - 4 \right) \cdot \frac{x}{2} \right]$ .

(Μονάδες 6)

Γ3. Να δείξετε ότι  $f(e^x) - \ln(x+1) > f(x+1) - x$ ,  $x > 0$ .

(Μονάδες 6)

Γ4. Να υπολογίσετε το  $\int_1^e \left( f(\ln x) + \frac{e}{2} \right) dx$ .

(Μονάδες 5)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  με συνεχή παράγωγο στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία  $f(-1) = -3$  και η συνάρτηση  $\phi(x) = \left( \int_{-1}^0 u f(u) du \right) \cdot e^{x-1} - e^{\mu-1} (x+1)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , που παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 = 1$ , το  $\phi(x_0) = -1$ . Να δείξετε ότι:

Δ1.  $\int_{-1}^0 u f(u) du = 1$  και  $\mu = 1$ .

(Μονάδες 7)

Δ2.  $\int_{-1}^0 x^2 f'(x) dx = 1$ .

(Μονάδες 5)

Δ3.  $\phi(x) \geq -1$ .

(Μονάδες 6)

Δ4. Η συνάρτηση  $g(x) = x \left( \int_0^{-1} |f(x)| dx \right) + (\phi(x) + 1)^2$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 1]$ .

(Μονάδες 7)