ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ / Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	05/01/2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 116.

Α2. **α.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 185.

β. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161.

Α3. **α.** **i) Ψ, ii) Ψ.**

β. **i)** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76 ΣΧΟΛΙΟ.

ii) $f(x)=2x \Rightarrow f'(x)=2$, άρα $f'(1)=2$, ενώ $f(1)=2$, άρα $\left(f(1)\right)'=2'=0$.

Α4. **α. Λ, β. Λ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=\dfrac{2x^2-\mu x+6}{x-2}$, $x>2$, άρα $f(x)(x-2)=2x^2-\mu x+6$, οπότε (f συνεχής)

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)(x-2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x^2-\mu x+6\right) \Rightarrow 0=8-2\mu+6 \Rightarrow \mu=7.$

Οπότε $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+6}{x-2}$, $x>2$, άρα $f(x)=\dfrac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)}{x-2}=2x-3$, $x>2$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+\kappa x-1\right)=4+2\kappa-1=3+2\kappa.$

Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2\kappa+3=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-3) \Leftrightarrow 2\kappa+3=1$, επομένως $\kappa=-1$ και

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-1, & x\le 2 \\ 2x-3, & x>2. \end{cases}$$

B2. $g(x)=\dfrac{1}{x-2}-x+f(x),\ x<2,$ οπότε $g(x)=\dfrac{1}{x-2}-x+x^2-x-1\Rightarrow$

$g(x)=\dfrac{1}{x-2}+x^2-2x-1$ και $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}+2x-2.$ Είναι η: $y=-x+2021,$ άρα

$\lambda_\eta=-1,$ οπότε αν $(x_0,g(x_0))$ το σημείο επαφής, θα ισχύει λόγω παραλληλίας ότι

$\lambda_\eta=g'(x_0)\Rightarrow-\dfrac{1}{(x_0-2)^2}+2x_0-2=-1\Rightarrow....\Rightarrow2(x_0-1)^2\left(x_0-\dfrac{5}{2}\right)=0.$

Συνεπώς $x_0=1,$ αφού $x_0=\dfrac{5}{2}>2$ και $g(1)=-3.$ Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, έχει εξίσωση:

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y-g(1)=g'(1)(x-1)\Rightarrow y+3=-(x-1)\Rightarrow y=-x-2.$

B3. $f'(x)=\begin{cases}2x-1, & x<2\\ 2, & x>2.\end{cases}$

Η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,2)$ και συνεχής σε αυτό, άρα

$f'(A_1)=(-\infty,3),$ αφού $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=....=3$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty.$

Ακόμη η $f'(x)$ είναι σταθερή στο $A_2=(2,+\infty)$ με $f'(x)=2,$ για κάθε $x>2.$

Άρα $f'(A_2)=\{2\}.$

Αφού $\lambda<2,$ τότε $\lambda\in f'(A_1)$ και $\lambda\notin f'(A_2),$ συνεπώς η εξίσωση $f'(x)=\lambda,\ \lambda<2,$ έχει μοναδική ρίζα, επειδή η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,2)$.

B4. Για $x<2$, $h(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-x+c\Rightarrow h'(x)=x^2-x-1$

Για $x>2$, $h(x)=x^2-3x+\dfrac{2}{3}+c\Rightarrow h'(x)=2x-3,$

Ακόμη: $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=...=1$ και $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=...=1,$

άρα οι συναρτήσεις:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-x+c, & x\le2\\ x^2-3x+\dfrac{2}{3}+c, & x>2,\quad c\in R,\end{cases}$$

είναι παράγουσες της $f(x)$ στο R.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $xf(x)=f(x)+\ln x$ για κάθε $x>0$, άρα $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$, $x>0$ και $x\neq 1$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, (1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1,$$ άρα από (1): $f(1)=1$.

Έτσι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x>0, x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

Γ2. **i)** $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x-x+1)'}{\left[(x-1)^2\right]'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2},$$ άρα $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

στο σημείο $A(1,f(1))$, είναι $y-f(1)=f'(x_0)(x-1)\Rightarrow y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)\Rightarrow$

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\dfrac{1}{x-1}=(-\infty)\cdot(-1)=+\infty$, συνεπώς η ευθεία $x=0$,

δηλαδή ο ημιάξονας Oy είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0,$$ δηλαδή

ο ημιάξονας Ox είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$. Για $y=f(x)$ με $x=x(t)>0, x(t)\neq 1, y=y(t)$, έχουμε:

$$y(t)=\frac{\ln x(t)}{x(t)-1}\Rightarrow y'(t)=\frac{\frac{x'(t)}{x(t)}\big(x(t)-1\big)-x'(t)\ln x(t)}{\big(x(t)-1\big)^2}\Rightarrow$$

$$y'(t)=\frac{x'(t)}{\big(x(t)-1\big)^2}\,\frac{x(t)-1-x(t)\ln x(t)}{x(t)}.$$

Για $t=t_0$ είναι $y'(t_0)=\dfrac{x'(t_0)}{\big(x(t_0)-1\big)^2}\,\dfrac{x(t_0)-1-x(t_0)\ln x(t_0)}{x(t_0)}\Rightarrow$

$$1-2\ln 2=\frac{x'(t_0)}{(2-1)^2}\frac{2-1-2\ln 2}{2}\Rightarrow x'(t_0)=2\frac{cm}{sec}.$$

Γ4. Είναι $h'(x)f(x)=(1-h(x))f'(x)$, άρα $(h(x)-1)'f(x)+(h(x)-1)f'(x)=0\Leftrightarrow$ $\left[(h(x)-1)f(x)\right]'=0$. Επομένως αν θεωρήσουμε $g(x)=(h(x)-1)f(x), x\in[\rho_1,\rho_2]$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2). Τα ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $h(x)-1=0$, άρα $h(\rho_1)-1=h(\rho_2)-1=0$.
Η g(x) είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ ως γινόμενο παραγωγισίμων.
$g(\rho_1)=(h(\rho_1)-1)f(\rho_1)=0, g(\rho_2)=(h(\rho_2)-1)f(\rho_2)=0$, οπότε $g(\rho_1)=g(\rho_2)$,
Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$, τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$. Συνεπώς η εξίσωση $g'(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) , γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,-\alpha]$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $f(-\alpha)=-1$, οπότε: $f(A_1)=\left[f(-\alpha),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$.
Είναι: $0\in f(A_1)=[-1,+\infty)$, άρα υπάρχει $x_1\in A_1$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.
Το x_1 είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1.
Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) , γνησίως μονότονη (συγκεκριμένα είναι γνησίως αύξουσα αφού $f(-\alpha)=-1<1=f(\alpha)$, με $-\alpha<\alpha, \alpha>0$ και γνησίως μονότονη) στο $A_2=[-\alpha,\alpha]$ και $f(-\alpha)=-1, f(\alpha)=1$, οπότε: $f(A_2)=[f(-\alpha),f(\alpha)]=[-1,1]$
Ακόμη: $0\in f(A_2)=[-1,1]$, άρα υπάρχει $x_2\in A_2$, τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Το x_2 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο A_2.
Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) , γνησίως φθίνουσα στο $A_3=[\alpha,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, $f(\alpha)=1$, οπότε: $f(A_3)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(\alpha)\right]=(-\infty,1]$.
Είναι: $0\in f(A_3)=(-\infty,1]$, άρα υπάρχει $x_3\in A_3$, τέτοιο ώστε $f(x_3)=0$.
Το x_3 είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_3.
Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις, ακριβώς, ρίζες στο R.

Δ2. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1,x_2]$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Ακόμη $f(x_1)=0=f(x_2)$, επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_1\in(x_1,x_2)$, τέτοιο, ώστε $f'(\rho_1)=0$. Συνεπώς η εξίσωση $f'(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1,x_2).

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_2, x_3]$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Ακόμη $f(x_2)=0=f(x_3)$, επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_2 \in (x_2, x_3)$, τέτοιο, ώστε $f'(\rho_2)=0$. Συνεπώς η εξίσωση $f'(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_2, x_3). Επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες ρ_1, ρ_2 στο R.

Δ3. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Ακόμη $f'(\rho_1)=0=f'(\rho_2)$, επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$. Συνεπώς η εξίσωση $f''(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2). Αυτό γεωμετρικά σημαίνει πως υπάρχει σημείο Μ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f'(x)$, στο οποίο η εφαπτομένη ε σ΄αυτήν, είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Δ4. Η ευθεία με εξίσωση $y=-x+3$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=3$.

i) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mu f(x)+6x}{xf(x)+x^2+5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mu\frac{f(x)}{x}+\frac{6x}{x}}{\frac{xf(x)}{x}+\frac{x^2}{x}+\frac{5x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mu\frac{f(x)}{x}+6}{(f(x)+x)+5}=\frac{-\mu+6}{8},$$

άρα $\frac{-\mu+6}{8}=1\Rightarrow \mu=-2$.

ii) $$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\cdot x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lambda.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}=-1,\quad \text{αφού}\ ,\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$$

Ακόμη: $$\lim_{x\to-\infty}x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{x^2}=u}{=}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1,$$ οπότε: $\lambda=(-1)\cdot(-1)\cdot1=1$.