

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ / Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05/01/2021

**ΘΕΜΑΤΑ**
**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει:  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

(Μονάδες 8)

**A2. α.** Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της  $f$  στο  $\Delta$ .

**β.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

(Μονάδες 2+2=4)

**A3.** Θεωρήστε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

**i)** Αν από κάθε σημείο  $\eta$  που βρίσκεται μεταξύ των  $f(\alpha)$ ,  $f(\beta)$  φέρουμε παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ , τότε αυτή θα τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σ' ένα τουλάχιστον σημείο .

**ii)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε ισχύει πάντοτε ότι:  $f'(x_0) = (f(x_0))'$ .

**α.** Να χαρακτηρίσετε καθένα από τους παραπάνω ισχυρισμούς με **A** (αληθής) ή **Ψ** (ψευδής).

(Μονάδες 2x1=2)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας για καθένα από τους παραπάνω ισχυρισμούς.  
(Μονάδες 2x3=6)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Για τη ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$ , ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}.$$

- β.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα:  $\left( \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$ .
- γ.** Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- δ.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .
- ε.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και η εξίσωση  $f'(x) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , τότε υποχρεωτικά η συνάρτηση  $f$  θα είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ .

(Μονάδες 5)

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + \kappa x - 1, & x \leq 2 \\ \frac{2x^2 - \mu x + 6}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$ ,  $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$ , η οποία είναι συνεχής

στο  $x_0 = 2$ . Να δείξετε ότι:

**B1.**  $\mu = 7, \kappa = -1$  (Μονάδες 6) και  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \leq 2 \\ 2x - 3, & x > 2. \end{cases}$  (Μονάδες 2)

(Μονάδες 8)

**B2.** Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \frac{1}{x-2} - x + f(x)$ ,  $x < 2$ , η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία  $\eta: y = -x + 2021$ , έχει εξίσωση  $y = -x - 2$ .

(Μονάδες 6)

**B3.** Η εξίσωση  $f'(x) = \lambda$ ,  $\lambda < 2$ , έχει μοναδική ρίζα.

(Μονάδες 6)

**B4.** Οι συναρτήσεις  $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + c, & x \leq 2 \\ x^2 - 3x + \frac{2}{3} + c, & x > 2, \quad c \in \mathbb{R}, \end{cases}$

είναι παράγουσες της  $f(x)$  στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες 5)

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει:

$$xf(x) = f(x) + \ln x \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x > 0, x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .

(Μονάδες 6)

**Γ2. i)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .

**ii)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

(Μονάδες 3+4=7)

**Γ3.** Ένα κινητό  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$  με  $x = x(t) > 0, x(t) \neq 1, y = y(t), t \geq 0$ . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου είναι

$$y'(t) = (1 - 2 \ln 2) \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \text{ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης } x(t) \text{ του}$$

σημείου, την χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία  $x = 2 \text{cm}$ .

(Μονάδες 5)

**Γ4.** Αν  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση και  $\rho_1, \rho_2$  με  $\rho_1 < \rho_2$ , διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης:  $h(x) = 1$  με  $\rho_1 < \rho_2$ , να δείξετε ότι η εξίσωση:  $h'(x)f(x) = (1 - h(x))f'(x)$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\rho_1, \rho_2)$ .

(Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, f(-\alpha) = -1, f(\alpha) = 1, \alpha > 0,$
- $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, -\alpha]$ ,  $f$  γνησίως μονότονη στο  $[-\alpha, \alpha]$ ,  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, +\infty)$ ,

Να δείξετε ότι:

**Δ1.** Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τρεις, ακριβώς, ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες 6)

**Δ2.** Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες 6)

**Δ3.** Υπάρχει σημείο  $M$  στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f'(x)$ , στο οποίο η εφαπτομένη σ' αυτήν, είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 5)

Αν επιπλέον, η ευθεία με εξίσωση  $y = -x + 3$  είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $-\infty$ , τότε,

**Δ4. i)** Να βρείτε την τιμή του  $\mu \in \mathbb{R}$ , ώστε:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mu f(x) + 6x}{xf(x) + x^2 + 5x} = 1$ . **(Μονάδες 4)**

**ii)** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$ . **(Μονάδες 4)**

Φροντιστήρια Εν-τάξη