επιτυχία... τόσο απλά!

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ/ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	07/11/2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

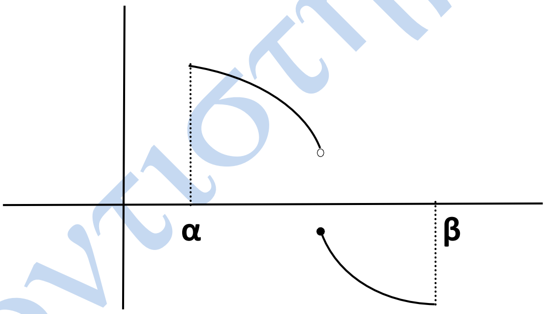
Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104.
Α2. **α.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 70-71. **β.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 72.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 113-114.

Α4. **α.** **Λανθασμένη** , αφού αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-1}{x}=2,$

ενώ $f(1)=3.$

β. **Λανθασμένη** , αφού η f δεν είναι συνεχής.



γ. **Λανθασμένη** , αιτιολόγηση: Σχολικό βιβλίο σελίδα 99.

Α5. **α.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0,$όταν $\alpha>1,$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty,$όταν $0<\alpha<1.$

β. $f^{(\nu)}=\left[f^{(\nu-1)}\right]',\nu\geq 3,$ $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\ln\alpha,\alpha>0.$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x)=(\etaμx-\sigmaυνx)'=\sigmaυνx+\etaμx$. $f''(x)=(f'(x))'=(\sigmaυνx+\etaμx)'=-\etaμx+\sigmaυνx$.

$f(x)+f''(x)=\etaμx-\sigmaυνx-\etaμx+\sigmaυνx=0$, για κάθε $x\in R$.

Β2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigmaυνx+\etaμx-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigmaυνx-1}{x}+\dfrac{\etaμx}{x}=0+1=1.$

ή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=1.$

Β3. $f'(x)+f(x)-2x+2=0\Leftrightarrow \etaμx-\sigmaυνx+\sigmaυνx+\etaμx-2x+2=0\Leftrightarrow \etaμx-x+1=0.$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\etaμx-x+1,\ x\in[0,\pi]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών.

Είναι $g(0)=1>0,\ g(\pi)=-\pi+1<0$, άρα $g(0)g(\pi)<0$, οπότε πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την g, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,\pi)$, τέτοιο ώστε $g(\rho)=0$. Συνεπώς η εξίσωση:

$f'(x)+f(x)-2x+2=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

Β4. $f(x)=0\Leftrightarrow \etaμx-\sigmaυνx=0\Leftrightarrow \etaμx=\sigmaυνx\Leftrightarrow \varepsilonφx=1 \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{\pi}{4}.$

Η ρίζα $x=\dfrac{\pi}{4}$, χωρίζει το $[0,\pi]$ στα διαστήματα $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	π
$f(x_0)$	-1	1
Πρόσημο	$-$	$+$

Επομένως στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ είναι $f(x)<0$, ενώ στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$ είναι $f(x)>0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=\alpha x^5+\beta x^3+\gamma x,\ \alpha,\beta,\gamma\in R,\ \ f'(x)=5\alpha x^4+3\beta x^2+\gamma,\ \ f''(x)=20\alpha x^3+6\beta x.$

$f(1)=3\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=3,\ f'(0)=1\Leftrightarrow \gamma=1,\ f''(-1)=-26\Leftrightarrow -20\alpha-6\beta=-26$, άρα

$\alpha+\beta=2,\ 10\alpha+3\beta=13$, οπότε: $\alpha=1,\beta=1$. Συνεπώς $f(x)=x^5+x^3+x$.

Γ2. **α.** Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$, έχουμε: $x_1^{\ 5}<x_2^{\ 5}$ και $x_1^{\ 3}<x_2^{\ 3}$, άρα

$x_1^5+x_1^3+x_1<x_2^5+x_2^3+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και 1-1 σε αυτό.

β. $\left(f^{-1}(x)\right)^5+\left(f^{-1}(x)\right)^3+f^{-1}(x)<2 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)<2 \Leftrightarrow x<2.$

Γ3. $f(x)=x^5+x^3+x,\ f'(x)=5x^4+3x^2+1,\ f''(x)=20x^3+6x.$

i) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4f'(x)}{xf''(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\left(5x^4+3x^2+1\right)}{x\left(20x^3+6x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^4+12x^2+4}{20x^4+6x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^4}{20x^4}=1.$$

ii) $$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}+\frac{\left|x^3+x+1\right|+x}{x^3}+x\eta\mu\frac{1}{x}\right]=0-1+1=0,\ \text{αφού :}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}\overset{u=-x}{=}\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{u}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|x^3+x+1\right|+x}{x^3}\overset{x^3+x+1<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-x-1+x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{x^3}=-1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$$

Γ4. α. $\left(g(x)\right)^2-2x^2g(x)+x^4=1 \Leftrightarrow \left(g(x)-x^2\right)^2=1 \Leftrightarrow \left|g(x)-x^2\right|=1>0.$

Επομένως η συνάρτηση $h(x)=g(x)-x^2$, είναι μη μηδενική . Αφού είναι και συνεχής (ως πράξεις συνεχών), θα διατηρεί το πρόσημό της στο R.

Όμως $h(1)=g(1)-1=2-1=1>0$, οπότε $h(x)>0$, άρα $\left|h(x)\right|=1 \Rightarrow h(x)=1$, έτσι $g(x)-x^2=1 \Leftrightarrow g(x)=x^2+1$.

β. Θεωρούμε συνάρτηση $\phi(x)=\left(f''(x)\right)^5-\left(g(x)\right)^5=\left(20x^3+6x\right)^5-\left(x^2+1\right)^5,\ x\in[0,1]$.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως διαφορά συνεχών.

Είναι $\phi(0)=-1<0,\ \phi(1)=26^5-2^5>0$, άρα $\phi(0)\phi(1)<0$, οπότε πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την ϕ, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $\phi(x_0)=0$. Συνεπώς η εξίσωση:

$\left(f''(x)\right)^5-\left(g(x)\right)^5=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) $$f(x)=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$$

ii) $$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' \Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^xe^x}{\left(e^x+1\right)^2} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Άρα $$f'(x)\left(e^x+1\right)-f(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\left(e^x+1\right)-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x+1}=0.$$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1}{0+1}=1$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

Δ2. α. Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$, έχουμε: $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $e^{x_1}+1<e^{x_2}+1\Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{x_1}+1}>\dfrac{1}{e^{x_2}+1}$,

άρα $1-\dfrac{1}{e^{x_1}+1}<1-\dfrac{1}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Οπότε $\dfrac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow y(e^x+1)=e^x\Leftrightarrow$

$e^x(1-y)=y\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}e^x=\dfrac{y}{1-y}$ (1). Για $\dfrac{y}{1-y}>0\Leftrightarrow y\in(0,1)$, από (1), έχουμε

$x=\ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$, συνεπώς $f^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$, $y\in(0,1)$,

άρα και $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$.

Δ3. α. Είναι $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{h}=\left(f^{-1}\right)'(x)$ και $\left(f^{-1}\right)'(x)=\left[\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right]'\Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x}{1-x}}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)\left(\dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)\Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)\left(\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x-x^2}$

Οπότε $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{h}=\dfrac{1}{x-x^2}$, $x\in(0,1)$.

β. Ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ και $f^{-1}(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, άρα

$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]'=x'\Leftrightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1\Leftrightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)=\dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(x)}\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}$

$f'\left(f^{-1}(x)\right)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-x^2}}\Leftrightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)=x-x^2\Leftrightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)=x(1-x)$, $x\in(0,1)$.

Δ4. $\dfrac{3f(x)}{3x-1}=\dfrac{4f^{-1}(x)}{4x-1}\Leftrightarrow 3f(x)(4x-1)=4f^{-1}(x)(3x-1)\Leftrightarrow$

$3f(x)(4x-1)-4f^{-1}(x)(3x-1)=0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=3f(x)(4x-1)-4f^{-1}(x)(3x-1)=0,\ x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$ ως διαφορά συνεχών.

Είναι $g\left(\frac{1}{4}\right)=-4f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(3\frac{1}{4}-1\right)=-4\ln\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)=4\ln\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)<0$

και $g\left(\frac{1}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)\left(4\frac{1}{3}-1\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3}>0$, αφού $f(x)>0$. Έτσι $g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(\frac{1}{4}\right)<0$.
οπότε πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την g, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$, τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$. Συνεπώς η εξίσωση:
η εξίσωση $\frac{3f(x)}{3x-1}=\frac{4f^{-1}(x)}{4x-1}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$.