ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ / Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	06/03/2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα: 135

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα: 140

Α3. **α.** Σχολικό βιβλίο σελίδα: 128

β. Σχολικό βιβλίο σελίδα: 143

γ. Σχολικό βιβλίο σελίδα: 156

Α4. **α.** **Λάθος**, αιτιολόγηση: σχολικό βιβλίο σελίδα: 134

β. **Σωστό**, αιτιολόγηση: σχολικό βιβλίο σελίδα: 156

Α5. **α. Σ,** **β. Λ,** **γ. Λ.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x>0$, $f'(x)=\left(\kappa\ln x+\frac{2}{x}\right)'=\frac{\kappa}{x}-\frac{2}{x^2}$, $x_0=1$ εσωτερικό του $(0,+\infty)$, άρα από

θεώρημα Fermat: $f'(1)=0\Rightarrow \frac{\kappa}{1}-\frac{2}{1^2}=0\Rightarrow \kappa=2.$

Β2. $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$, είναι $f'(x)=0\Rightarrow \frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}=0\Rightarrow x=1.$

Ο πίνακας προσήμου της f' και μεταβολών της f είναι:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε από τον παραπάνω πίνακα έχουμε:

f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Β3. $f''(x)=\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)'=-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}$, $f''(x)=0\Rightarrow -\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}=0\Rightarrow \frac{2-x}{x^3}=0\Rightarrow x=2$

Ο πίνακας προσήμου της f'' και μεταβολών της f' είναι:

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	
$f'(x)$		↗		↘	

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε από τον παραπάνω πίνακα έχουμε:

f' γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,2]$ και κοίλη στο $[2,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει καμπή στο $x=2$, δηλαδή το σημείο $A(2,2\ln 2+1)$ είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Β4. **α.** $f(x)=2\ln x+\frac{2}{x}\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x^2}$, όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L'H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=0$.

Επομένως η ευθεία $y=2x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty$.

β. Η ευθεία $y=f(2)+f'(2)(x-2)$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2,f(2))$ και η f είναι κοίλη στο $[2,+\infty)$, άρα θα ισχύει: $f(x)<y\Rightarrow f(x)<f(2)+f'(2)(x-2)$, για κάθε $x>2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $2\left(f(x)-x\right)\le f(-3)+f(3),(1)$.

Για $x=-3$ η (1) γίνεται: $2\left(f(-3)+3\right)\le f(-3)+f(3)\Rightarrow f(3)-f(-3)\ge 6$ (2).

Για $x=3$ η (1) γίνεται: $2\left(f(3)-3\right)\le f(-3)+f(3)\Rightarrow f(3)-f(-3)\le 6$, (3).

Από (2), (3) παίρνουμε $f(3)-f(-3)=6$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-3,0]$ και $[0,3]$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-3,0)$ και $(0,3)$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν:

$\rho_1\in(-3,0)$ και $\rho_2\in(0,3)$ τέτοια, ώστε: $f'(\rho_1)=\dfrac{f(0)-f(-3)}{3}$ και

$f'(\rho_2)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}$, συνεπώς $f'(\rho_1)+f'(\rho_2)=\dfrac{f(0)-f(-3)}{3}+\dfrac{f(3)-f(0)}{3}=$

$\dfrac{f(3)-f(-3)}{3}\overset{\Gamma_1}{=}\dfrac{6}{3}=2$.

Γ3. **α.** $2\left(f(x)-x\right)\le f(-3)+f(3)$, για κάθε $x\in R$, άρα

$2f(x)-2x-f(-3)-f(3)\le 0$, (1) για κάθε $x\in R$.

Θεωρούμε $h(x)=2f(x)-2x-f(-3)-f(3)$, $x\in R$.

Είναι $h(-3)=2f(-3)+6-f(-3)-f(3)=0$ και $h(3)=2f(3)-6-f(-3)-f(3)=0$.

Άρα η (1) γίνεται $h(x)\le h(-3)$ και $h(x)\le h(3)$, δηλαδή η h παρουσιάζει μέγιστο το 0 για $x=-3$ και για $x=3$. Η h είναι παραγωγίσιμη, οπότε από θεώρημα Fermat θα ισχύουν: $h'(-3)=0$ και $h'(3)=0$.

Όμως $h'(x)=2f'(x)-2$, άρα $2f'(-3)-2=0\Rightarrow f'(-3)=1$

και $2f'(3)-2=0\Rightarrow f'(3)=1$.

β. Η f′ είναι συνεχής στο διάστημα $[-3,3]$ αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Ακόμη η f′ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-3,3)$ αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Επίσης ισχύει $f'(-3)=1=f'(3)$,

επομένως από θεώρημα Rolle υπάρχει $\rho\in(-3,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho)=0$.

Γ4. Είναι $f(x)=f(-x)+g(x)\Rightarrow f(x)-f(-x)-g(x)=0$.

Θεωρούμε $G(x)=f(x)-f(-x)-g(x)$, $x\in[-3,3]$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(-3,3)$ τέτοιο, ώστε $G(\xi)=0$. Η G είναι συνεχής στο διάστημα $[-3,3]$ αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η g είναι συνεχής.

Ακόμη $G(-3)=f(-3)-f(3)-g(-3)=-6-g(-3)<0$, αφού

$0\le g(-3)\le 5\Rightarrow -5\le -g(-3)\le 0$ και $G(3)=f(3)-f(-3)-g(3)=6-g(3)>0$

αφού $0\le g(3)\le 5$. Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(-3,3)$ τέτοιο, ώστε $G(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $F'(x)+1=0$, για κάθε $x>1$, άρα $(F(x)+x)'=0$ και η $F(x)+x$ είναι συνεχής,

επομένως $F(x)+x=c$, $c\in R$. Είναι $F(x)=\ln x(f(x)-2e)$, άρα $\ln x(f(x)-2e)=c-x$ με

$f(e)=e$, οπότε $\ln e(f(e)-2e)=c-e\Rightarrow c=0$. Άρα $\ln x(f(x)-2e)=-x\Rightarrow$

$f(x)=2e-\dfrac{x}{\ln x}$, $x>1$.

Δ2. **i.** $f(x)=2e-\dfrac{x}{\ln x}$, $x>1$, άρα $f'(x)=\left(2e-\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{\ln^2 x}$. Είναι $f'(x)=0\Rightarrow$

$\dfrac{1-\ln x}{\ln^2 x}=0\Rightarrow x=e$. Ο πίνακας προσήμου της f′ και μεταβολών της f είναι:

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Μέγ.	$\searrow$	

Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$, οπότε από τον παραπάνω πίνακα έχουμε:

f γνησίως αύξουσα στο $(1, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=e$ το $f(e)=e$.

Αν $A_1=(1,e]$, τότε $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to 1} f(x), f(e)\right]=(-\infty, e]$,
αφού f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1,e]$, ενώ:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(2e-\frac{x}{\ln x}\right)=2e-\infty=-\infty$, επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{x}{\ln x}\right)=-1(+\infty)=-\infty$ και $f(e)=e$.

Αν $A_2=(e,+\infty)$, τότε $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right)=(-\infty, e)$,
αφού f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(e,+\infty)$, ενώ:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e-\frac{x}{\ln x}\right)=-\infty$, επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L'H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ και $f(e)=e$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f, είναι το $f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty, e]$.

ii. Αν $0<\kappa<e$, τότε $\kappa\in f(A_1)$ και $\kappa\in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\kappa$, έχει δύο ρίζες, μία στο A_1 και μία στο A_2 αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα A_1, A_2.

Αν $\kappa>e$, τότε $\kappa\notin f(A_1)$ και $\kappa\notin f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\kappa$, δεν έχει ρίζες στο $(1,+\infty)$.

Αν $\kappa=e$, τότε $\kappa\in f(A_1)$ και $\kappa\notin f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\kappa$, έχει μία ρίζα στο A_1 την $x=e$.

$G'(x)=2e-f(x),\ x>1$.

Δ3. Η G είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη για $x>1$. Ακόμη η G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+1)$ άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε: $G'(x_0)=\frac{G(x+1)-G(x)}{x+1-x}$, (1)

$G'(x)=2e-f(x)=\frac{x}{\ln x}$, με $G''(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}>0$, για $x>e$.

Άρα η $G'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>e$.

$x_0 \in (x, x+1)$, άρα $x < x_0 < x+1$, οπότε $G'(x) < G'(x_0) < G'(x+1) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\frac{x}{\ln x} < G(x+1) - G(x) < \frac{x+1}{\ln(x+1)}, \text{ για κάθε } x > e.$$

Δ4. **α.** $\frac{x}{\ln x} < G(x+1) - G(x) < \frac{x+1}{\ln(x+1)} \Rightarrow \frac{1}{\ln x} < \frac{G(x+1)-G(x)}{x} < \frac{x+1}{x\ln(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \frac{1}{\ln(x+1)} = 1 \cdot 0 = 0$, άρα από κριτήριο

παρεμβολής θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{G(x+1)-G(x)}{x} = 0$.

β. $\lim\limits_{x\to 2021} \frac{G'(x-2021+e) - G'(e)}{x-2021} \overset{x-2021=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} \frac{G'(u+e)-G'(e)}{u} = G''(e) = 0$,

αφού για $x > 1$: $G''(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, που για $x = e$ δίνει $G''(e) = 0$.