

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 06/03/2021

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

(Μονάδες 8)

A2. Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

(Μονάδες 2)

A3. α. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού για μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της.

β. Να αναφέρετε τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ .

γ. Πότε μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε διάστημα Δ στο οποίο είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του;

(Μονάδες 2+2+2)

A4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία τις προτάσεις που ακολουθούν με: **Σωστό**, ή **Λάθος**.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Αν για μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο (α, β) , ισχύει ότι

$f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f είναι σταθερή στο

$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

(Μονάδα 1 για Σωστό ή Λάθος)

(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

- β. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και κυρτή, τότε η f'' **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική στο \mathbb{R} .

(Μονάδα 1 για Σωστό ή Λάθος)

(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς σε διάστημα Δ .
Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

- β. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ και x_0 ένα σημείο του Δ .
Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

- γ. Αν f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $f''(x_0) = 0$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι πάντοτε σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = k \ln x + \frac{2}{x}$, $k \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

στο $x_0 = 1$.

- B1.** Να δείξετε ότι $k = 2$.

(Μονάδες 6)

- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(Μονάδες 6)

- B3.** Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 7)

B4. α. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g

$$\text{για την οποία: } g(x) - 2x = \frac{f(x)}{x}, \quad x > 0.$$

(Μονάδες 3)

β. Να δείξετε ότι: $f(x) < f(2) + f'(2)(x-2)$, για κάθε $x > 2$.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(\mathbb{R}) = [0, 5]$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε: $2(f(x) - x) \leq f(-3) + f(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

Γ1. $f(3) - f(-3) = 6$.

(Μονάδες 4)

Γ2. Υπάρχουν: $\rho_1 \in (-3, 0)$, $\rho_2 \in (0, 3)$ τέτοια, ώστε $f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = 2$.

(Μονάδες 7)

Γ3. α. $f'(-3) = 1$ και $f'(3) = 1$.

β. Υπάρχει $\rho \in (-3, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho) = 0$.

(Μονάδες 4+4)

Γ4. Υπάρχει $\xi \in (-3, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(-\xi) + g(\xi)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e) = e$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση F για την οποία ισχύουν: $F(x) = \ln x (f(x) - 2e)$ και $F'(x) + 1 = 0$, για κάθε $x > 1$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = 2e - \frac{x}{\ln x}$, $x > 1$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε:

i. τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα καθώς και το σύνολο τιμών της f .
(Μονάδες 6)

ii. το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa > 0$.
(Μονάδες 3)

Έστω επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση G για την οποία: $G'(x) = 2e - f(x)$, $x > 1$.

Δ3. Να δείξετε ότι: $\frac{x}{\ln x} < G(x+1) - G(x) < \frac{x+1}{\ln(x+1)}$, για κάθε $x > e$.
(Μονάδες 4)

Δ4. α. Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x+1) - G(x)}{x} = 0$.
(Μονάδες 3)

β. Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 2021} \frac{G'(x-2021+e) - G'(e)}{x-2021}$.
(Μονάδες 3)