ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ/ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	07/11/2020

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 2)

Α2. **α.** Πότε μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδα 2)

β. Πότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0;

(Μονάδες 2)

Α3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, για κάθε $x \in R^*$.

(Μονάδες 6)

Α4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία τις προτάσεις που ακολουθούν ως: **Σωστή,** ή **Λανθασμένη**. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Για κάθε συνάρτηση $f : A \to R$, ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in A$.

(Μονάδα 1 για Σωστή, ή Λανθασμένη)
(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

β. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει ότι $f(x) \neq 0$, τότε η f είναι θετική ή αρνητική για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 2 για Σωστή, ή Λανθασμένη)
(Μονάδες 2 για αιτιολόγηση)

γ. Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη σ'αυτό.

(Μονάδα 1 για Σωστή, ή Λανθασμένη)
(Μονάδες 3 για αιτιολόγηση)

Α5. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = \ldots,$όταν $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = \ldots,$όταν $0 < \alpha < 1$.

β. $f^{(\nu)} = \ldots, \nu \geq 3$, $\left(\alpha^x\right)' = \ldots, \alpha > 0$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$.

Β1. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$, $f''(x)$ και να δείξετε ότι:
$f(x) + f''(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

(Μονάδες 3+3+4)

Β2. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)-1}{x} = 1$.

(Μονάδες 4)

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f'(x) + f(x) - 2x + 2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

(Μονάδες 6)

Β4. Να προσδιορίσετε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^5 + \beta x^3 + \gamma x$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, για την οποία ισχύουν:
$f(1) = 3$, $f'(0) = 1$, $f''(-1) = -26$ και $f(R) = R$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

(Μονάδες 6)

Γ2. **α.** Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

(Μονάδες 3)

β. Να λύσετε την ανίσωση: $\left(f^{-1}(x)\right)^5 + \left(f^{-1}(x)\right)^3 + f^{-1}(x) < 2$.

(Μονάδες 3)

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4f'(x)}{xf''(x)}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-x}+\dfrac{|x^3+x+1|+x}{x^3}+x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right].$

(Μονάδες 2+2)

Γ4. Για τη συνεχή συνάρτηση g ισχύει: $(g(x))^2+x^4=2x^2g(x)+1$, για κάθε $x\in R$ και $g(1)=2$. Να δείξετε ότι:

α. $g(x)=x^2+1$.

(Μονάδες 5)

β. Η εξίσωση: $(f''(x))^5-(g(x))^5=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 4)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Να δείξετε ότι:

Δ1. i) $f(x)=1-\dfrac{1}{e^x+1}$, **ii)** $f'(x)(e^x+1)-f(x)=0$ και **iii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

(Μονάδες 1+3+1+1)

Δ2. α. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

(Μονάδες 2)

β. $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$.

(Μονάδες 4)

Δ3. α. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{h}=\dfrac{1}{x-x^2}$, $x\in(0,1)$.

(Μονάδες 4)

β. $f'(f^{-1}(x))=x(1-x)$, $x\in(0,1)$.

(Μονάδες 4)

Δ4. Η εξίσωση $\dfrac{3f(x)}{3x-1}=\dfrac{4f^{-1}(x)}{4x-1}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right)$.

(Μονάδες 5)