

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τετάρτη 5 Μαΐου 2021  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### Θέμα Α

**A1.** Θεώρημα Fermat σελ.142 σχολικού.

**A2.** σελ.143 σχολικού.

**A3.** σελ.46 σχολικού.

**A4.** α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος.

#### Θέμα Β

$$\text{B1. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}}{(x-1) \cdot (x-2) \sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(x-1) \cdot (x-2) \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1) \cdot (x-2) \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{-1}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) = +\infty$$

διότι :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$  εφόσον  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0$  και  $\sqrt{1-x} > 0$  ενώ  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x-2} = 1$

**B2.**  $f'(x) = (1 + \sqrt{1-x})' = \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 1)$  και  $f$  συνεχής στο

$x = 1$ , άρα η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $A = (-\infty, 1]$  οπότε η  $f \ll 1 - 1 \gg$ , επομένως είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της  $f$ .

Η  $f$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $A = (-\infty, 1]$  με σύνολο τιμών

$$f(A) = [f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [1, +\infty) \text{ αφού: } f(1) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \sqrt{1-x}) = +\infty$$

**Εύρεση του τύπου της  $f^{-1}$**

Για κάθε  $y \geq 1$  έχουμε

$$y = 1 + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow (y-1)^2 = 1-x \Leftrightarrow x = 1 - (y-1)^2.$$

Άρα  $f^{-1}(y) = 1 - (y-1)^2$  με  $y \geq 1$

Αν θέσουμε όπου  $y$  το  $x$  έχουμε  $f^{-1}(x) = 1 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x$ ,  $A_{f^{-1}} = [1, +\infty)$

**B3.** Η συνάρτηση  $f^{-1} \circ g$  ορίζεται όταν το σύνολο  $\{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_{f^{-1}}\} \neq \emptyset$

$$\text{Δηλαδή } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases} \Leftrightarrow x \geq e, \text{ άρα } (f^{-1} \circ g)(x) = -(\ln x)^2 + 2 \ln x, x \geq e.$$

**B4 α)**  $\varphi'(x) = \frac{-2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2(-\ln x + 1)}{x}, x \geq e.$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow -\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow -\ln x < -1 \Leftrightarrow x > e$$

Επειδή η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[e, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[e, +\infty)$ .

$$\text{θα έχουμε: } x \geq e \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(e) \Leftrightarrow \varphi(x) \leq 1$$

Άρα παρουσιάζει μέγιστο για  $x = e$ , το  $\varphi(e) = 1$ .

$$\beta) \varphi''(x) = 2 \cdot \frac{(-\ln x + 1)' \cdot x - (-\ln x + 1)}{x^2} = 2 \cdot \frac{-1 + \ln x - 1}{x^2} = 2 \cdot \frac{\ln x - 2}{x^2}, x \geq e$$

- $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$   
 $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$

Το πρόσημο της  $\varphi''$  και τα διαστήματα κυρτότητας της  $\varphi$  φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	e	$e^2$	$+\infty$
$\varphi''(x)$	-	○	+
$\varphi(x)$	↪	↻	↻

Η  $\varphi$  κοίλη στο διάστημα  $[e, e^2]$  και κυρτή στο διάστημα  $[e^2, +\infty)$  ενώ το σημείο  $M(e^2, \varphi(e^2))$  δηλαδή το  $M(e^2, 0)$  είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  που προφανώς ανήκει στον άξονα  $x'x$ .

### Θέμα Γ

Γ1. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x - \sin x + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{\sin x - 1}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \alpha$$

$$\text{Άρα } \alpha = 1 \text{ και } f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x \leq 0 \\ \frac{x - \sin x + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x - \sin x + 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x + 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-\sin x + 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

Γ2. Για κάθε  $x > 0$ , ισοδύναμα έχουμε :

$$f(x) < \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} < \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \sigma\upsilon\nu x + 1 < \frac{1}{2}x^2 + x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \sigma\upsilon\nu x - 1 > 0$$

Έστω  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sigma\upsilon\nu x - 1$ ,  $x \geq 0$  αρκεί να δείξουμε ότι  $g(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$

$g'(x) = x - \eta\mu x > 0$  στο  $(0, +\infty)$  διότι  $|\eta\mu x| < |x|$  για  $x \neq 0$ .

οπότε  $-|x| < \eta\mu x < |x| \Rightarrow \eta\mu x < x$  για  $x > 0$

Επειδή  $g$  συνεχής στο  $[0, +\infty)$ , η  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

Άρα για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$

Γ3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) \quad (1)$

•  $\left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$  για κάθε  $x > 0$

$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \frac{1}{x}, x > 0.$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  (από την (1))

Επομένως η  $y = 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

Γ4. Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  σημείο της  $C_f$  και  $(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  η εξίσωση της εφαπτομένης της στο  $M$ .

Η  $(\varepsilon)$  διέρχεται από το  $A(1, -1)$  όταν:

$$1 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0) \Leftrightarrow 1 - (-x_0^3 + 1) = -3x_0^2(1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$1 + x_0^3 - 1 = -3x_0^2 + 3x_0^3 \Leftrightarrow 2x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = 0$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $(-\infty, 0)$ .

Έστω  $h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ ,  $x \in (-\infty, 0]$

- Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  και  $h(-1) \cdot h(0) = -6 < 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (-1, 0)$  τέτοιος ώστε  $h(x_0) = 0$ .

Επειδή  $h'(x) = 6x^2 - 6x > 0$  για κάθε  $x < 0$  η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0)$ .  
 Επομένως το  $x_0$  είναι μοναδικό.

### Β-τρόπος

Η  $h$  παραγωγίσιμη στο  $A = (-\infty, 0)$  με  $h'(x) = 6x^2 - 6x \Leftrightarrow h'(x) = 6x(x-1)$

Για κάθε  $x \in A$  έχουμε  $6x(x-1) > 0$  άρα  $h'(x) > 0$  οπότε η  $h$  γνησίως αύξουσα στο

$A = (-\infty, 0)$  και το σύνολο τιμών της είναι  $h(A) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \right) = (-\infty, 2)$

Ο αριθμός  $0 \in h(A)$  άρα υπάρχει  $x_0 \in A$  τέτοιος ώστε  $h(x_0) = 0$ , το  $x_0$  μοναδικό διότι η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A = (-\infty, 0)$

### Θέμα Δ

Δ1.  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$  και  $f''(x) = e^x + \frac{1}{x+1} > 0$  για κάθε  $x > -1$ .

Άρα  $f'(x)$  γνησίως αύξουσα και  $f'(0) = 0$  άρα η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = 0$

Από τη μονοτονία της  $f'$  και τη ρίζα της  $x = 0$  βρίσκουμε το πρόσημό της.

- Για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

$x$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗

Άρα η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $A_1 = (-1, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $A_2 = [0, +\infty)$

Στη θέση  $x = 0$  παρουσιάζει ελάχιστο το  $f(0) = 0$  το οποίο προφανώς είναι μοναδικό.

**Δ2.** Για όπου  $y$  το  $x_0$  και  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$|g(x) - g(x_0)| \leq (x - x_0)^2 \text{ και για } x \neq x_0 \text{ έχουμε :}$$

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$ , σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ δηλαδή } g'(x_0) = 0, \text{ άρα } g'(x) = 0, x \in \mathbb{R} \text{ αφού το } x_0 \text{ είναι τυχαίο}$$

σημείο. Επομένως η  $g$  είναι σταθερή.

**Δ3.** Η  $g$  είναι σταθερή και  $g(0) = 21$ . Άρα  $g(x) = 21$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έχουμε την εξίσωση  $f(x) = 21$  με  $x \in (-1, +\infty)$ .

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της  $f$ .

Η  $f$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $A_1 = (-1, 0]$  με

$$f(A_1) = \left[ f(0), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = [0, +\infty) \text{ διότι :}$$

- $$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [e^x - 1 - \ln(x+1)] = e^{-1} - 1 - (-\infty) = +\infty$$

διότι  $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$  (όπου  $x+1 = u$ )

Η  $f$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $A_2 = [0, +\infty)$  με

$$f(A_2) = \left[ f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty) \text{ διότι :}$$

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - 1 - \ln(x+1)] \text{ (Μορφή } +\infty - \infty) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ e^x \left( 1 - \frac{1}{e^x} - \frac{\ln(x+1)}{e^x} \right) \right] \quad (1)$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(e^x)'} = \dots = 0$

Άρα από την (1) έχουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Το  $21 \in f(A_1)$  άρα υπάρχει  $\rho_1 \in (-1, 0)$  τέτοιο ώστε  $f(\rho_1) = 21$ , το  $\rho_1$  μοναδικό αφού η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $A_1$  και προφανώς  $\rho_1 < 0$ .

Το  $21 \in f(A_2)$  άρα υπάρχει  $\rho_2 \in (0, +\infty)$  τέτοιο ώστε  $f(\rho_2) = 21$ , το  $\rho_2$  μοναδικό αφού η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $A_1$  και προφανώς  $\rho_2 > 0$ .

**Δ4. α)** Ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την  $f$  στο  $[\rho_1, 0]$

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi_1 \in (\rho_1, 0) \text{ τέτοιος ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(\rho_1)}{0 - \rho_1} = \frac{21}{\rho_1} \quad (1)$$

Ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την  $f$  στο  $[0, \rho_2]$ .

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi_2 \in (0, \rho_2) \text{ τέτοιος ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\rho_2) - f(0)}{\rho_2 - 0} = \frac{21}{\rho_2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε  $\rho_1 \cdot f'(\xi_1) = \rho_2 \cdot f'(\xi_2)$

**β)** Για κάθε  $\rho_1 < x \leq 0$  ισχύει  $f(\rho_1) > f(x) \geq f(0)$  δηλαδή  $0 \leq f(x) < 21$

αφού η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $(-1, 0]$

• Για κάθε  $0 \leq x < \rho_2$  ισχύει  $f(0) \leq f(x) < f(\rho_2)$  δηλαδή  $0 \leq f(x) < 21$ .

Αφού η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$

Επομένως  $0 \leq f(x) < 21$  για κάθε  $x \in (\rho_1, \rho_2)$ .