

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025
ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ'Λ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 186.

A2 Σχολ. Βιβλίο σελ. 76.

A3. Σχολ. Βιβλίο σελ. 161.

A4. (α) Σ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Έχει παράγωγο:

$$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2\alpha x + 9. \text{ Η } f \text{ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο } x_0 = 1,$$

$$\text{άρα από θεώρημα Fermat, } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6.$$

B2. Είναι:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16 - 12 = 4, x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				

• $A_1 = (0,1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1$$

$f(A_1) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} (-3,1), 0 \in f(A_1), f \text{ γνησ.αύξ.}, x_1 \text{ μοναδική στο } A_1: f(x_1) = 0$

• $A_2 = [1,3)$

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$$

$f(A_2) \stackrel{f \text{ γν.φθίν.}}{=} (-3,1], 0 \in f(A_2), f \text{ γνησ. φθίν.}, x_2 \text{ μοναδική στο } A_2: f(x_2) = 0$

• $A_3 = [3, +\infty)$

$$f(3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = +\infty$$

$f(A_3) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} (-3, +\infty), 0 \in f(A_3), f \text{ γν. αυξ.}, x_3 \text{ μοναδική στο } A_3: f(x_3) = 0$

B3. Είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2, f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 12 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$			

$f(x)$: κοίλη στο $(-\infty, 2]$.

$f(x)$: κυρτή στο $[2, +\infty)$.

$f(x)$: σημείο καμπής το $\Gamma(2, f(2)), \Gamma(2, -1)$.

B4. Έχουμε τα εξής:

$$\text{εφαπτομένη } C_f : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \quad (1)$$

$$\text{εφαπτομένη } C_g : y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - \xi - f(\xi) = (1 + f'(\xi))(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$y - f(\xi) = x - \xi + f'(\xi)(x - \xi) + \xi \Leftrightarrow y - f(\xi) = x + f'(\xi)(x - \xi) \quad (2).$$

Το σημείο τομής των δύο εφαπτομένων θα προκύψει από την επίλυση του συστήματος των (1) και (2). Εφόσον τα πρώτα μέλη είναι ίσα, τότε θα πρέπει και

$$f'(\xi)(x - \xi) = x + f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow x = 0. \text{ Για } x = 0 \text{ λοιπόν, προκύπτει μέσω της (1):}$$

$$y - f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) - \xi f'(\xi). \text{ Δηλαδή οι 2 εφαπτομένες τέμνονται στο}$$

σημείο $\Lambda(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$, δηλαδή πάνω στον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Γ1. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \eta\mu x = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0^2 + 0} = 0 \text{ και } f(0) = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Οπότε f συνεχής στο 0.

Όμως, εξετάζοντας αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2}{x\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x}} = +\infty,$$

(αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$ με $\sqrt{x^2 + x} > 0$ κοντά στο 0).

Οπότε f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. Η f είναι συνεχής συνάρτηση η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$, άρα η γραφική της παράσταση δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = A$

➤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$

➤ Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$, έχουμε

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = |\eta\mu x| \cdot \frac{1}{|x|} \leq 1 \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|}, \text{ οπότε } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, σύμφωνα με το

Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Άρα τελικά $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$.

Οπότε η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} =$$

$$\stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}.$$

Άρα η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2} = 0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi, 0)$. Θέτουμε $h(x) = e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2}$. Η h λοιπόν:

- Είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
 - Μας δίνει $h(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ και $h(-\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 0$.
- Άρα $h(0)h(-\pi) < 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, 0)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $h(\xi) = 0$. Δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Έστω $M(x(t), y(t))$, το κινητό σημείο που ανήκει στην C_f για $x \geq 0$.

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ για την οποία θα ισχύει

$$x'(t_0) = y'(t_0) \quad (1).$$

Είναι λοιπόν $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, οπότε με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε:

$$y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)} \right)' \Leftrightarrow y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \Leftrightarrow y'(t) = \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}.$$

Για $t = t_0$, η (1) γίνεται:

$$x'(t_0) = \frac{x'(t_0)(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \stackrel{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1$$

$$\left(2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \right)^2 = (2x(t_0) + 1)^2 \Leftrightarrow 4(x^2(t_0) + x(t_0)) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ (αδύνατη).}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ για την οποία θα ισχύει $x'(t_0) = y'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln x \cdot \ln x}} = \frac{F(x)}{e^{(\ln x)^2}}$, $g(x)$: παραγωγίσιμη

$$g'(x) = \frac{F'(x) \cdot e^{-(\ln x)^2} - F(x) \cdot e^{-(\ln x)^2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{e^{-(\ln x)^2} \left[f(x) - 2F(x) \cdot \frac{\ln x}{x} \right]}{(x^{\ln x})^2} =$$

$$\frac{x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} \cdot \frac{x \cdot f(x) - 2F(x) \cdot \ln x}{x} = \frac{1}{x^{\ln x}} \cdot \frac{x \cdot f(x) - 2F(x) \cdot \ln x}{x} \stackrel{(\text{υπόθεση})}{=} 0$$

Άρα, $g'(x)=0$, $g(x)$: συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $g(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$.

Δ2. i. Από υπόθεση η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$M(1, f(1))$, είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $\epsilon: y=2x$, οπότε $f'(1)=2$.

Η αρχική επίσης για $x=1$ μας δίνει, $f(1)=2F(1)\ln 1 \Leftrightarrow f(1)=0$, άρα το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$

παρουσιάζει απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{\ln x} = L.$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

άρα, $L = 2 \cdot 1 = 2$.

ii. Έχουμε:

$$F(x) \text{ συνεχής, άρα } F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right) \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

άρα, $F(1)=1$.

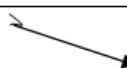
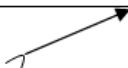
Από Δ_1 , $g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c$, για $x = 1$:

$$\frac{F(1)}{1^0} = c \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0.$$

Δ3. Η $F(x) = x^{\ln x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = \frac{2 \ln x}{x} e^{\ln^2 x}.$$

Είναι $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x} e^{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Οπότε:

x	0	1	$+\infty$
F'		-	+
F			

Η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$, έχει προφανή ρίζα την $x = 1$.

Έστω ότι υπάρχει και 2^η ρίζα x_1 για την εξίσωση. Όμως:

- Αν $x_1 > 1$, τότε, $F(x_1^2) = F(x_1) - (x_1 - 1)^2 \Leftrightarrow F(x_1^2) - F(x_1) = -(x_1 - 1)^2$ και επειδή στο $(1, +\infty)$ είναι $x_1^2 > x_1$, τότε δεδομένου ότι η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, θα ισχύει $x_1^2 > x_1 \Leftrightarrow F(x_1^2) > F(x_1) \Leftrightarrow F(x_1^2) - F(x_1) > 0$.

Όμως $-(x_1 - 1)^2 < 0$,

άρα η ισότητα $F(x_1^2) - F(x_1) = -(x_1 - 1)^2$ οδηγεί σε άτοπο.

- Αν $0 < x_1 < 1$, τότε, $F(x_1^2) = F(x_1) - (x_1 - 1)^2 \Leftrightarrow F(x_1^2) - F(x_1) = -(x_1 - 1)^2$ και επειδή στο $(0, 1)$ είναι $x_1^2 < x_1$, τότε δεδομένου ότι η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, θα ισχύει $x_1^2 < x_1 \Leftrightarrow F(x_1^2) > F(x_1) \Leftrightarrow F(x_1^2) - F(x_1) > 0$.

Όμως $-(x_1 - 1)^2 < 0$,

άρα η ισότητα $F(x_1^2) - F(x_1) = -(x_1 - 1)^2$ ομοίως οδηγεί σε άτοπο.

Άρα η $x_0 = 1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Δ4. Είναι $F(x) > 0$ αφού από Δ3 η F έχει ελάχιστο $F(1) = 1$, άρα $E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{(\ln x)^2} dx$.

Γνωρίζουμε ότι $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$.

Θέτοντας όπου x το $x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$ έχουμε:

$$\ln e^{(\ln x)^2} \leq e^{(\ln x)^2} - 1 \Leftrightarrow (\ln x)^2 \leq e^{(\ln x)^2} - 1 \Leftrightarrow e^{(\ln x)^2} \geq (\ln x)^2 + 1 \Leftrightarrow F(x) \geq \ln^2 x + 1.$$

Άρα δεδομένου ότι οι συναρτήσεις δεν είναι παντού ίσες,

$$\int_1^e F(x) dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow E > \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx$$

$$\Leftrightarrow E > \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx + \left[x \right]_1^e \Leftrightarrow E > e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e + e - 1 \Leftrightarrow$$

$$E > -2(e - e + 1) + 2e - 1 \Leftrightarrow E > 2e - 3.$$