

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025
ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 93

A2 Σχολ. Βιβλίο σελ. 16

A3. (α) $\wedge$ (β) Σ (γ) Σ (δ) Σ (ε) $\wedge$

A4. α. 0 β. 2x

ΘΕΜΑ Β

B1.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i \cdot v_i$
0	10	20	10	0
1	15	30	25	15
2	11	22	36	22
3	8	16	44	24
4	6	12	50	24
Σύνολο	50	100	-	85

$$\blacksquare \quad v_1 = v - (v_2 + v_3 + v_4 + v_5) = 50 - (15 + 11 + 8 + 6) = 50 - 40 = 10$$

$$\blacksquare \quad f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100 = \frac{v_i}{50} \cdot 100 = 2v_i$$

$$f_1\% = 20\%, \quad f_2\% = 30\%, \quad f_3\% = 22\%, \quad f_4\% = 16\%, \quad f_5\% = 12\%$$

$$N_1 = v_1 = 10$$

$$\blacksquare \quad N_2 = N_1 + v_2 = 25$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 36$$

$$N_4 = N_3 + v_4 = 44$$

B2. Από τον τύπο της μέσης τιμής προκύπτει: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{85}{50} = 1,7$.

B3. Η διάμεσος αποτελεί το ημιάθροισμα της 25^{ης} και 26^{ης} παρατήρησης, δηλαδή:

$$\delta = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

B4. α) $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$ των υπαλλήλων εργάζονται υπερωριακά το πολύ

3 ώρες.

β) $y_i = x_i + 4$. Άρα $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$.

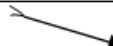
ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Είναι $f'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$. Το πρόσημο της f και η μονοτονία της

f' φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$				

Άρα f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στα

διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.

Γ2. Στο $x_0 = 0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή $f(0) = \alpha$.

Στο $x_1 = 2$ η f παρουσιάζει μέγιστο με τιμή $f(2) = 8 + \alpha$.

$$\text{Οπότε } \frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 8 + \alpha}{2} = -8 \Leftrightarrow 2\alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -12.$$

Γ3. Είναι $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 - 12)' = -6x^2 + 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε έστω η εξίσωση εφαπτομένης: $y = \lambda x + \beta$, με $\lambda = f'(1) = 6$.

Άρα $y = 6x + \beta$. Η ε διέρχεται από το $M(1, -8)$, άρα: $-8 = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y = 6x - 14$.

Γ4. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12, x \in \mathbb{R}.$

Στο $[2, +\infty)$ ισχύει f : γν.φθίνουσα, άρα

$$x \geq 2 \Leftrightarrow \overset{f \text{ γν. φθίν}}{f(x)} \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow \overset{:(-2)}{x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}.$ Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7, x \in \mathbb{R}.$

Το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ αποτελεί το όριο της παραγώγου της f στο $x_0 = 1$, άρα:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 8 + 2\lambda.$$

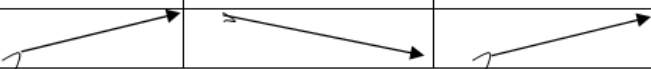
$$\text{Συνεπώς } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow 8 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

Δ2. Για $\lambda = -4$ είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = x^2 - 8x + 7, x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Οπότε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0.$$

$$\text{Με διακρίνουσα } \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 36 \text{ και ρίζες } x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{8-6}{2} = 1 \\ \frac{8+6}{2} = 7 \end{cases}$$

προκύπτει τελικά ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας για την f .

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

Άρα f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$ και γνησίως

φθίνουσα στο διάστημα $[1, 7]$.

Δ3. Είναι $2020, 2025 \in [7, +\infty)$ και f γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$, άρα:

$$2020 < 2025 \Leftrightarrow f(2020) < f(2025) \text{ . Άρα } f(2025) - f(2020) > 0 \text{ .}$$

Ομοίως είναι $\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1, 7]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$, άρα:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \text{ . Άρα } f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \text{ .}$$

$$\text{Από τα παραπάνω προκύπτει } A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0 \text{ .}$$

Δ4. Είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 8x + 7$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$f''(x) = 2x - 8, x \in \mathbb{R} \text{ .}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 10x + 16)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{3})^2} \text{ .}$$

Όμως για το τριώνυμο $x^2 - 10x + 16$, έχουμε $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 36$ και

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{10-6}{2} = 2 \\ \frac{10+6}{2} = 8 \end{cases} \text{ . Άρα } x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8) \text{ και το όριο}$$

$$\text{γίνεται: } = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} [(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})] = -12\sqrt{3} \text{ .}$$