ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026
ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 65.
Α2 Σχολ. Βιβλίο σελ. 87.
Α3 Σχολ. Βιβλίο σελ. 27.
Α4. (α) Λ **(β)** Σ **(γ)** Σ **(δ)** Λ **(ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$, $x\in R$

Β1. Για κάθε $x\in R$, η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3)'-(x^2)'-3(x)'+(1)'=\frac{1}{3}3x^2-2x-3\cdot 1=x^2-2x-3.$$

Β2. Έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.

Με διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$ οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{2-4}{2}=-1\\ \frac{2+4}{2}=3\end{cases}.$$

Ο πίνακας προσήμου της f' και μονοτονίας της f είναι ο ακόλουθος:

x	-∞	-1	3	+∞
f'(x)	+		−	+
f(x)	↗		↘	↗

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[3,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,3]$.

Στο $x_1=-1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+1=\frac{8}{3}.$$

Στο $x_2=3$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+1=-8$.

Β3. Η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης θα είναι της μορφής: $\varepsilon:\ y=\lambda x+\beta$, όπου

$\lambda = f'(0) = -3$. Άρα $\varepsilon:\ y = -3x + \beta$. Το σημείο $(0, f(0))$, δηλαδή το $(0,1)$ ανήκει

στην ε , οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της:

$1 = -3\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$. Άρα τελικά $\varepsilon:\ y = -3x + 1$.

Β4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f'(x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x-3) = -1-3 = -4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_7}{7} = 4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 28 \Leftrightarrow 4+5+4+\kappa+0+3+7 = 28$$
$$\Leftrightarrow 23 + \kappa = 28 \Leftrightarrow \kappa = 5.$$

Γ2. Τοποθετώντας τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά έχουμε: 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

Άρα $\delta = x_{(4)} = 4$.

Γ3. Έχουμε:

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_7-\bar{x})^2}{7} = \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2\cdot 2 + (5-4)^2\cdot 2 + (7-4)^2}{7} =$$
$$\frac{16+1+2+9}{7} = \frac{28}{7} = 4.$$

Γ4. Είναι $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{\sqrt{4}}{4} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$.

Οπότε CV>10% , άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε: $E = x\cdot y \Leftrightarrow x\cdot y = 100 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} y = \dfrac{100}{x}\quad (1)$. Άρα:

$$\Pi = 2x + 2y \overset{(1)}{=} 2x + 2\cdot\frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}.$$

Οπότε: $\Pi(x) = 2x + \dfrac{200}{x},\ x>0.$

Δ2. Η συνάρτηση Π(x) είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = 2 + 200\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$$

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 10$$

$$\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2} > 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 200 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 100 \Leftrightarrow |x| > 10 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 10$$

$$\Pi'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2} < 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 200 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 10.$$

Ο πίνακας προσήμου της Π' και μονοτονίας της Π είναι ο ακόλουθος:

x	0 10	$+\infty$
Π'(x)	−	+
Π(x)	↘	↗

Η Π είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,10]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[10,+\infty)$.

Η περίμετρος του παραλληλογράμμου ελαχιστοποιείται για x=10m , οπότε θα είναι $y = \dfrac{100}{x} = \dfrac{100}{10} = 10\text{m}$, άρα όταν έχουμε τετράγωνο.

Δ3. Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $x_1 - x_2$ και της $\Pi(x_1) - \Pi(x_2)$, οπότε

$\cdot x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$

$\cdot x_1, x_2 \in (0,10),\ \Pi(x) \downarrow$

$x_1 < x_2 \overset{\Pi(x)\downarrow}{\Leftrightarrow} \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$

Άρα $A < 0$.

Δ4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10} = \lim_{x\to 10}\frac{\dfrac{2x^2-200}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{10x}-10}{1}} = \lim_{x\to 10}\frac{2x^2-200}{x^2\cdot\left(\sqrt{10x}-10\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 10}\frac{2(x^2-100)\cdot\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)\cdot\left(\sqrt{10x}+10\right)} = \lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)\cdot(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left[\left(\sqrt{10x}\right)^2-10^2\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)\cdot(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2(10x-100)} = \lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)\cdot(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2(x-10)} =$$

$$= \lim_{x\to 10}\frac{2(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2} == \lim_{x\to 10}\frac{(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{5x^2} = \frac{(10+10)\left(\sqrt{100}+10\right)}{5\cdot 10^2} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$$