ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026
ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ'Λ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 133.
Α2 Σχολ. Βιβλίο σελ. 51.
Α3. Σχολ. Βιβλίο σελ. 185.
Α4. (α) Λάθος **(β)** Σωστό **(γ)** Σωστό **(δ)** Σωστό **(ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι τα $D_f=(1,+\infty)$ και $D_g=[2,+\infty)$ αντίστοιχα. Συνεπώς:

$$D_h=D_{f\circ g}=\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow D_h=\begin{cases}x\ge 2\\ \sqrt{x-2}+1>1\end{cases}\Leftrightarrow D_h=\begin{cases}x\ge 2\\ \sqrt{x-2}>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow D_h=\begin{cases}x\ge 2\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow D_h=(2,+\infty).$$

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right)=2\ln\left(\sqrt{x-2}\right)=\ln\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\ln(x-2).$$

Β2. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$, με παράγωγο:

$$h'(x)=\left[\ln(x-2)\right]'=\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)'=\frac{1}{x-2}>0\quad,\quad x\in(2,+\infty)$$

Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, άρα και 1–1.

Το πεδίο ορισμού της $h^{-1}(x)$ είναι το σύνολο τιμών της h(x).

$$h((2,+\infty))\overset{h\uparrow}{=}\left(\lim_{x\to 2}h(x),\lim_{x\to+\infty}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)\text{, αφού}$$

· $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$

όπου $x-2=u$, $u_0=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$

· $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

όπου $x-2=u$, $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$h(x)=y \Leftrightarrow \ln(x-2)=y \overset{e^x:1-1}{\Leftrightarrow} e^{\ln(x-2)}=e^y \Leftrightarrow x-2=e^y \Leftrightarrow x=e^y+2$$

Άρα ο τύπος της αντίστροφης είναι : $h^{-1}(x)=e^x+2,\ x\in R$.

B3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to2}\left[\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right] \quad (1)$$

· όπου $x-2=t \Leftrightarrow x=2+t$, άρα $t_0=\lim_{x\to2}(x-2)=0$

$$(1)\rightarrow \lim_{t\to0^+}\frac{2\ln(2+t-1)\cdot\ln t}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\ln(1+t)\cdot\ln t}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\ln(1+t)}{t}\cdot\ln t \quad (2)$$

$$\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{2\ln(1+t)}{t}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{t\to0^+}\frac{2}{1+t}=2,\quad \text{άρα } (2)\rightarrow \lim_{t\to0^+}\frac{2\ln(1+t)}{t}\cdot\ln t=2\cdot(-\infty)=-\infty$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

$f(x)=\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$, $x\in R$.

Γ1. i) Εφόσον η f παρουσιάζει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, θα πρέπει $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in R$.

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}=\ell$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\kappa\neq0$, τότε θα ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\kappa x=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \kappa>0\\ -\infty, & \text{αν } \kappa<0\end{cases}$,
  οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε άτοπο αφού το όριο είναι ίσο με $\ell\in R$.
- Αν $\kappa=0$, τότε πράγματι θα ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\mu}{x}=0$.

Άρα $\kappa=0$.

ii) Εφόσον η ευθεία y = x , εφάπτεται στην C_f, στο σημείο $O(0,0)$, τότε θα πρέπει

να ισχύει $f'(0)=1$. Όπου $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$ και

$$f'(x)=\frac{(\mu x)'\cdot(x^2+1)-\mu x\cdot(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{\mu\cdot(x^2+1)-2\mu x^2}{x^2+1}=\frac{\mu-\mu x^2}{x^2+1}.$$

Άρα $f'(0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\mu-\mu\cdot 0^2}{0^2+1}=1 \Leftrightarrow \mu=1$.

Γ2. Είναι $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in R$.

i) Για κάθε $x\in R$, είναι $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$. Συνεπώς:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$ και

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<1$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$-$
f	↘	↗	↘

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

Στο $x_1=-1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(-1)=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}=-\dfrac{1}{2}$.

Στο $x_2=1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$.

ii) Έστω τα διαστήματα $A_1=(-\infty,-1)$, $A_2=[-1,1]$ και $A_3=(1,+\infty)$. Έχουμε:

$$f(A_1)\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim_{x\to -1}f(x),\lim_{x\to -\infty}f(x)\right)=\left(-\frac{1}{2},0\right),$$

αφού $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \overset{f\ \sigma\upsilon\nu.}{=} f(-1) = -\frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$f(A_2) \overset{f\uparrow}{=} \left[f(-1), f(1)\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, αφού $f(1) = \frac{1}{2}$.

$f(A_3) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x)\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, με $\alpha \in R$, δεδομένου ότι $\frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$,

θα είναι το εξής:

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει 1 ρίζα μοναδική αφού $\frac{1}{2} \in f(A_2)$.
- Αν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει 0 ρίζες, αφού $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(A)$.

Γ3. i) Το ολοκλήρωμα για όπου ν το ν+1 γίνεται:

$I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx$. Άρα:

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx =$$

$$\int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}.$$

ii) Από την σχέση του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε:

Για ν=0: $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$

Για ν=0, όμως $I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$

Για ν=1, όμως $I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{2(1-\ln 2)}{4} = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω συνάρτηση $w(x) = g(x) + x$.

Η w είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ και

$w(-1) = g(-1) - 1 < 0$, αφού $0 < g(x) < 1$

$w(0) = g(0) > 0$

Άρα $w(-1) \cdot w(0) < 0$.

Επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο,

ώστε: $w(x_1) = 0$, άρα $g(x_1) + x_1 = 0$.

Για την μοναδικότητα του x_1 :

Είναι $w'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$, αφού $g'(x) \neq -1$.

Άρα η w' δεν μηδενίζεται, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα η $w'(x) > 0$ ή $w'(x) < 0$. Επομένως είναι γνησίως μονότονη.

Άρα το x_1 είναι μοναδικό.

Δ2. Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, θα πρέπει :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(g(x)+x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[x(g(x)+x)\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\kappa\right) = 2+1\cdot 1-\kappa = 3-\kappa.$$

Άρα πρέπει : $3 - \kappa = 0$. Επομένως $\kappa = 3$.

Δ3. i) Για $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ είναι : $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \dfrac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Θέτουμε: $\sigma\upsilon\nu x = y$. Άρα: $2y^3 - 3y^2 + 1$ με $0 < y \leq 1$ και ρίζα το $y = 1$.

Κάνουμε σχήμα Horner

2	– 3	0	1	1
	2	– 1	– 1	
2	– 1	– 1	0	

Άρα : $2y^3 - 3y^2 + 1 = (y-1)(y-1)(y+\frac{1}{2}) = (y-1)^2(y+\frac{1}{2}) \geq 0$, $0 < y \leq 1$.

Άρα : $f'(x) \geq 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$.

Με $x \geq 0$, είναι $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

ii) Είναι : $3f(x) = \pi \Leftrightarrow 3f(x) - \pi = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2})$.

Άρα το σύνολο τιμών : $f([0, \frac{\pi}{2})) = [f(0), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x))$

Είναι : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2\cdot 1 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$

Επομένως : $f([0, \frac{\pi}{2})) = [f(0), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)) =$ **$[0, +\infty)$.**

Έστω $K(x) = 3\cdot f(x) - \pi$. Με $K'(x) = 3\cdot f'(x) \geq 0$.

Η K είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$.

Με σύνολο τιμών : $[K(0), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} K(x)) = [-\pi, +\infty)$ αφού :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} K(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(3f(x) - \pi) = 3(+\infty) - \pi = +\infty$.

Το $0 \in [-\pi, +\infty)$. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_2 τέτοιο , ώστε $f(x_2) = 0$ και λόγω της μονοτονίας της f θα είναι και μοναδικό .

Δ4. i) Είναι $f(x) = x^2 \cdot w(x)$.

Δείξαμε ότι η w είναι γνησίως μονότονη .

Είναι $-1 < 0$ και είδαμε $w(-1) < w(0)$, άρα συμπεραίνουμε ότι η w είναι γνησίως αύξουσα . Είναι : $x_1 \leq x \leq 0$ και αφού w είναι γνησίως αύξουσα $w(x_1) \leq w(x)$, άρα $w(x) \geq 0$. Επομένως : $f(x) = x^2 \cdot w(x) \geq 0$

Άρα : $f(x) \geq 0$.

ii) Έχουμε:

$E=\int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$, οπότε πρέπει $\int_{x_1}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$

άρα $\int_{x_1}^{0} x^2\left(g(x)+x\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\etaμx+εφx-3x)dx$

Οπότε $\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\etaμx+εφx-3x)dx-\int_{x_1}^{0} x^3dx \quad (1).$

Ισχύει $\int_{x_1}^{0} x^3\cdot g'(x)dx=\left[x^3g(x)\right]_{x_1}^{0}-3\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx\overset{(1)}{=}-x_1^{\,3}g(x_1)-3\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\etaμx+εφx-3x)dx-\int_{x_1}^{0} x^3dx\right)$

$\overset{g(x_1)=x_1}{=} x_1^{\,4}-3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\etaμx+εφx-3x)dx+3\int_{x_1}^{0} x^3dx \quad (2).$

Όμως $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(2\etaμx+\frac{\etaμx}{συνx}-3x\right)dx=\left[-2συνx-\ln|συνx|-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=$

$\left(-2συν\frac{\pi}{3}-\ln συν\frac{\pi}{3}-\frac{3\cdot\frac{\pi^2}{9}}{2}\right)-(-2-\ln1-0)=-2\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{6}+2=1+\ln2-\frac{\pi^2}{6}$

$3\int_{x_1}^{0} x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}=-\frac{x_1^{\,4}}{4}.$

Άρα η (2): $x_1^{\,4}-3\left(1+\ln2-\frac{\pi^2}{6}\right)+3\left(-\frac{x_1^{\,4}}{4}\right)=x_1^{\,4}-3-3\ln2+\frac{\pi^2}{2}-3\frac{x_1^{\,4}}{4}=$

$\frac{x_1^{\,4}}{4}-3\ln2+\frac{\pi^2}{2}-3.$